ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения первого тура AMB, Junior

Капитанский бой. Посчитайте количество перестановок последовательности (1, 2, 3, 4, 5), чтобы 1 не стояло на 1 месте, 2 не стояло на 2 месте и так далее.

Ответ: 44

Решение. Задача переформулируется в подсчет субфакториала 5 (!5). Используя формулу включения-исключения можно получить, что

$$!5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right) = 44.$$

№1. Сумма делителей натурального числа является степенью двойки. Докажите, что количество делителей этого числа тоже степень двойки.

Решение. Общеизвестно, что сумма делителей числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ равняется

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}) = 2^a.$$

Это значит, что $(1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}) = 2^b$ для всех i.

Если $\alpha_i + 1 = xy$ где x - нечетное число не равное 1, то

$$(1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{xy-1}) = (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{x-1})(1 + p_i^x + p_i^{2x} + \dots + p_i^{(y-1)x}).$$

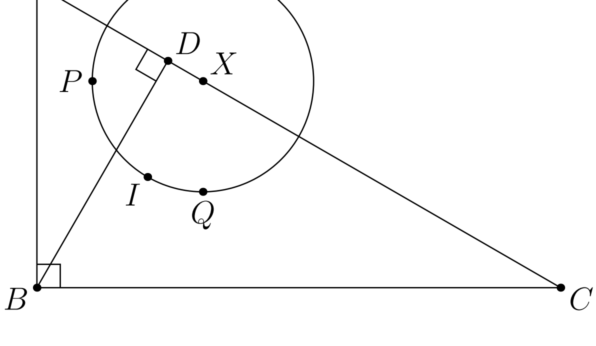
Первая скобочка этого произведения – сумма нечетного количества нечетных чисел, а значит нечетное число – противоречие.

Значит, что $\alpha_i + 1$ - степень двойки для всех i.

Количество делителей n – $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 2^c$.

№2. ABC – прямоугольный треугольник с $\angle B = 90°$. Пусть BD – высота опущенная с B на гипотенузу AC. Пусть P, Q и I — центры вписанных окружностей треугольников ABD, CBD и ABC соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника PIQ лежит на гипотенузе AC.

Решение.



Заметим, A, P, I на одной прямой, так как AP и AI биссектрисы $\angle BAC$. Аналогично, I, Q, C на одной прямой. Тогда:

$\angle IAC + \angle ICA = \frac{(\angle BAC)}{2} + \frac{(\angle BCA)}{2} = \frac{180° - \angle ABC}{2} = 45°$

Откуда получаем, $\angle PIQ = 135°$. Значит, если центр описанной окружности $\triangle PIQ - O$, то $\angle POQ = 90°$ и $PO = DO$. И теперь запомним, по этим двум свойствам O определяется однозначно.

Теперь будем рассматривать $\angle PDQ$, несложно понять что так как P и Q центры вписанных окружностей, $\angle PDQ = 90°$. Тогда, пусть X - точка пересечения описанной окружности $\triangle PDQ$ с прямой AC. Тогда, $PXDQ$ вписанный, из-за чего $\angle PXQ = \angle PDQ = 90°$.

Также, из-за того, что PQ биссектриса $\angle ADB$ и DQ биссектриса $\angle BDC$, $\angle XDP = \angle QPD = 90°$. Равенство данных углов, вкупе с вписанностью $PXDQ$ даст нам $\angle XPQ = \angle XQP = 45°$.

Таким образом, $\triangle XPQ$ прямоугольный, равнобедренный треугольник с вершиной в X. Тогда, вспоминая определение O, точки X и O совпадают.

№3. Последовательность натуральных чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ определяется следующим образом $a_1 = x$, если последняя цифра числа a_i не больше чем 5, то a_{i+1} получается из a_i удалением последней цифры. Иначе $a_{i+1} = 9a_i$. Можно ли выбрать такой x, что последовательность будет бесконечная?

Ответ: Нет.

Решение. Заметим, что если последняя цифра a_i больше 5, то последняя цифра a_{i+1} будет меньше, чем 5. Значит, что $a_{i+2} = \left\lfloor \frac{a_{i+1}}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9a_i}{10} \right\rfloor < a_i$. Значит, что либо $a_{i+2} < a_i$, либо $a_{i+1} < a_i$ – какой бы a_1 мы не выбрали последовательность будет конечной.

№4. Определите все положительные целые числа n, такие что $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ делит $1^7 + 2^7 + \cdots + n^7$.

Ответ: $n = 3, 4, 5, 8, 45, 88, 131, 260$.

Решение. Если n – нечетный, то $\frac{n(n-1)}{2} - 1 = \frac{(n-2)(n+1)}{2} = (n-2) \cdot \frac{n+1}{2}$ делит $1^7 + 2^7 + \cdots + n^7$.

Тогда $1^7 + 2^7 + \cdots + n^7 \equiv 1^7 + 2^7 + \cdots + \left(\frac{n-3}{2}\right)^7 + \left(-\frac{n-3}{2}\right)^7 + \left(-\frac{n-5}{2}\right)^7 + \cdots + (-1)^7 + 0^7 + 1^7 + 2^7 \equiv 129 \equiv 0 \pmod{n-2}$

Значит, что $n - 2 = 1, 3, 43, 129 \implies n = 3, 5, 45, 131$.

Если n – четный, тогда $n = 2k$ и $\frac{n(n-1)}{2} - 1 = k(2k-1) - 1 = (k-1)(2k+1)$ делит $1^7 + 2^7 + \cdots + (2k)^7$.

Тогда $1^7 + 2^7 + \cdots + (2k)^7 \equiv 1^7 + 2^7 + \cdots + (-1)^7 + 0^7 + 1^7 + 2^7 + \cdots + (-1)^7 + 0^7 + 1^7 + 2^7 \equiv 2(1^7 + 2^7 + \cdots + (-1)^7) + 129 \equiv 129 \equiv 0 \pmod{k-1}$

Значит, что $k - 1 = 1, 3, 43, 129 \implies n = 4, 8, 88, 260$.

№5. На математической олимпиаде 7 участникам были даны 6 задач. Известно, что для каждой пары 2 задач существуют хотя-бы 3 участника, которые решили обе эти задачи. Докажите, что найдется либо 1 участник который решил все задачи, либо 2 участника которые решили по 5 задач.

Решение. Пойдем от противного, тогда среди 7 участников не более одного который решил 5 задач, а все остальные решили не более 4 задач.

Все участники решили вместе всего не более 29 задач, значит по принципу Дирихле найдется задача, которую решили не более 4 участников, БОО это задача 1.

Посчитаем количество пар (участник, задача), что этот участник решил эту задачу и еще в добавок решил 1 задачу двумя способами. По условию их хотя-бы $5 \cdot 3 = 15$ (кол-во пар на 3). Если участник решил n задач включая первую, то в этот счетчик он добавляет ровно $n-1$. Значит, что кол-во пар не более чем $(5-1)+3(4-1) = 13$. Но 13 меньше 15 – противоречие.

№6. Назовем число *угарным* если оно представимо в виде $a^b + b$ $(a, b > 1)$. Докажите, что существует отрезок из 2025 подряд идущих чисел в котором ровно 2023 *угарных* числа.

Решение. Обозначим количество *угарных* чисел от n до $n+2024$ как $f(n)$. Минимальное *угарное* число – $2^2+2=6$, значит числа $1,2,3,4,5$ - не *угарный*. Отсюда следует что $f(1) < 2021$.

Теперь рассмотрим $k = a^{b(b+1)\dots(b+2024)} + b$. Тогда можем заметить, что $k, k+1, k+2, \dots, k+2024$ все являются *угарными* числами.

Отсюда $f(n) = 2025$. $f(1) < 2021$ и $f(k) = 2025$. $f(i+1)$ отличается от $f(i)$ не более чем на 1, значит в силу непрерывности найдется значение между 1 и k для которого $f(n) = 2023$, это и будут наши последовательные числа.

ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения второго тура AMB, Junior

Капитанский бой. Посчитатайте сумму сумм делителей чисеол от 1 до 9.

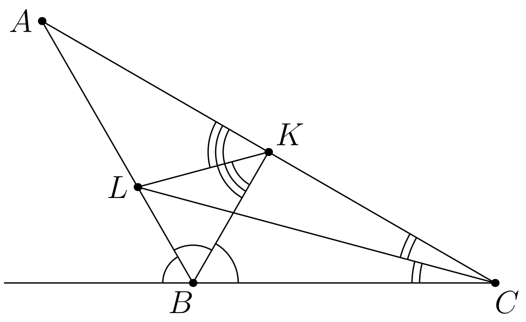
Ответ: 69.

Решение. 1 является делителем для $\left\lfloor \frac{9}{1} \right\rfloor$ чисел, 2 является делителем для $\left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor$ чисел, и т.д.

Тогда общая сумма – $1 \cdot \left\lfloor \frac{9}{1} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor + 3 \cdot \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor + \cdots + 9 \cdot \left\lfloor \frac{9}{9} \right\rfloor = 9+8+9+8+5+6+7+8+9 = 69$.

№1. В треугольнике ABC, точки K и L основания биссектрис углов B и C соответственно. Оказалось, что KL – биссектриса угла $\angle AKB$. Найдите значение угла $\angle ABC$.

Решение.



Точка L – точка пересечения биссектрисы $\angle BCK$ и внешней бисскетрисы $\angle BKC$. Значит, что L – центр вневписанной окружности треугольника BKC, что значит, что BL – внешняя биссектриса KBC. А значит, что $\angle ABC = 120°$.

№2. Мы нанизываем $2n$ белых шаров и $2n$ черных шаров, образуя непрерывную цепь. Покажите, что, независимо от порядка расположения шаров, всегда можно разрезать сегмент цепи так, чтобы он содержал ровно n белых шаров и n черных шаров.

Решение. Выберем какие-то $2n$ последовательных бусин. Пусть среди них x черных шаров. При сдвиге этих $2n$ бусин на 1, количество черных бусин изменяется не более чем на 1. При сдвиге на $2n$ кол-во черных бусин станет $2n - x$. Одно из этих чисел не больше чем n, другое не меньше чем n. Значит, что при изменении от одного до другого мы встретим число n.

№3. Сколько существует натуральных чисел, которые не заканчиваются на 0, что сумма всех цифр квадрата этого числа равна 4?

Ответ: Бесконечно.

Решение. Рассмотрим числа вида $10^n + 1$, очевидно, что их бесконечно. $(10^n + 1)^2 = 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1$, значит сумма цифр – 4.

№4. Есть четыре баскетболиста A, B, C, D. Изначально мяч находится у A. Мяч всегда передается от одного игрока другому. Сколько существует способов, чтобы мяч вернулся к A после **семи** передач? (например, $A \to C \to B \to D \to A \to B \to C \to A$).

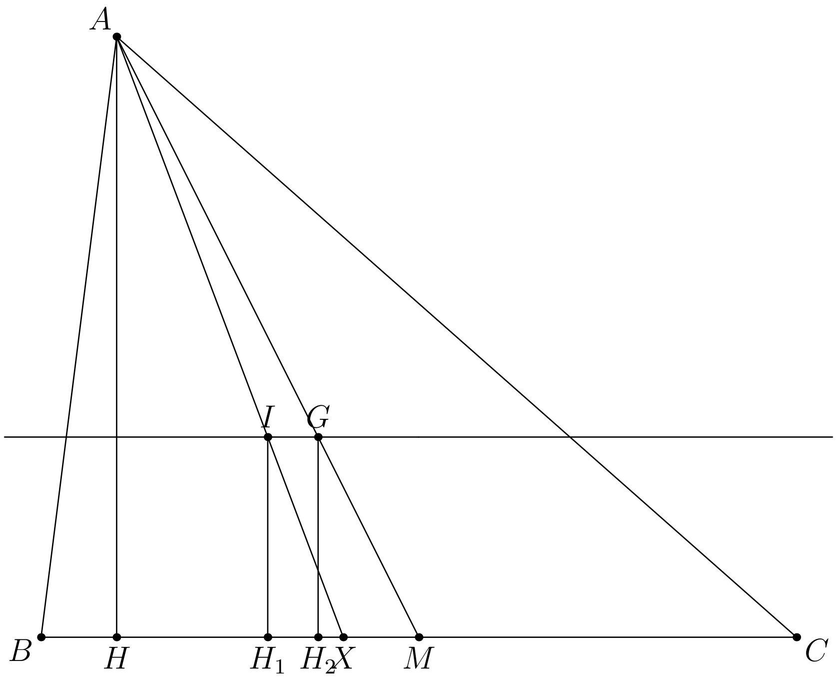
Ответ: 546.

Решение. Определим $f(n)$ как количество способов передать мяч от A до B за n передач. Тогда нам нужно найти $3f(6)$ - количество способов передать за 6 до B, а потом передать A и то же самое с C и D. Если A первым делом передает мяч кому-то кроме B, то оставшееся кол-во способов – $f(n-1)$, итого $2f(n-1)$. Если же A передает сначала B, то оставшееся кол-во способов – $f(n-2)$, итого $3f(n-2)$. Значит, можно вывести рекуррентную формулу $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$. И по ней $3f(6) = 3 \cdot 182 = 546$.

№5. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC, который обладает следующим свойством: $AB + AC = 2BC$. Биссектриса треугольника ABC проходящая через A пересекает BC в точке X. I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Найдите соотношение $\frac{AI}{XI}$.

Ответ: 2.

Решение.



Отметим точку G – центроид треугольника, высоту AH и медиану AM. Опустим высоты из точек I и G на прямую BC, обозначив их как IH_1 и GH_2. Из подобия треугольников MGH_2 и MAH следует

$$GH_2 = \frac{AH}{3}.$$

Далее найдем, чему равняется IH_1. Это радиус вписанной окружности r. Запишем два равенства для площади треугольника:

$$S = \frac{(AB + BC + AC) \cdot IH_1}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2}.$$

$$IH_1 = \frac{BC \cdot AH}{AB + BC + AC} = \frac{BC \cdot AH}{3BC} = \frac{AH}{3}.$$

Таким образом, $IH_1 = GH_2$, следовательно, $IG \parallel BC$.

Тогда из подобия треугольников AIG и AXM:

$$\frac{AI}{XI} = \frac{AG}{GM} = 2.$$

№6. Докажите, что существует бесконечно много четных натуральных чисел не представимых в виде $2^a + 3^b - 5^c$, где a, b, c – натуральные числа.

Решение. Рассмотрим остатки $\pmod{120}$. У степеней двойки всевозможных остатков 6, у степеней тройки всевозможных остатков 4, у степеней 5 всевозможных остатков 2. Итого мы можем получить не более $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 < \frac{120}{2} = 60$ остатка $\pmod{120}$, что значит существует остаток который получить невозможно.

ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения третьего тура AMB, Junior

Капитанский бой. Существует ли трёхзначное простое число, остающееся простым при любой перестановке его цифр?

Ответ: 113, 131, 311.

№1. Докажите, что все числа вида $101\underbrace{00\ldots0}_{3n}$ можно представить в виде $2a^3+3b^3+4c^3$ где n, a, b, c – неотрицательные целые числа.

Ответ: $a = 2 \cdot 10^n, b = 3 \cdot 10^n, c = 10^n$

Решение.

$$101 \cdot 10^{3n} = 2 \cdot (2 \cdot 10^n)^3 + 3 \cdot (3 \cdot 10^n)^3 + 4 \cdot (10^n)^3 = 16 \cdot 10^{3n} + 81 \cdot 10^{3n} + 4 \cdot 10^{3n}.$$

№2. AD – биссектриса в прямоугольном треугольнике ABC. Учитывая, что $\angle B = 60^\circ$ и $AB - AC = 6$ найдите длину BD.

Ответ: 12.

Решение. Пусть R – точка на AB такая, что $RA = AC$. Тогда, $BR = 6$.

Так как $\triangle CAR$ – равнобедренный, $CR \perp DA$. Поэтому $\angle DCR = 15^\circ = \angle DAR$ и $CDRA$ вписанный.

Значит, $\angle BDR = 30^\circ$ и $\angle BRD = 90^\circ$, из-за чего $BD = 2BR = 12$.

№3. В царстве Математики официальная валюта – Эйлеров Цент. У царя Математики имеется 10000 Эйлеровых Центов в государственной казне – монетами по 5, 10, 25 Эйлеровых Центов. Царь Математики хочет разделить государственный бюджет пополам, чтобы потратить ровно 5000 Эйлеровых Центов на расширение кольца натуральных чисел. Для этого ему нужно разделить все монеты на две кучи – по 5000 Эйлеровых Центов. Докажите что у Царя Математики получится это сделать.

Решение. Каждую пару монет номиналом 5 можно заменить на одну монету номиналом 10, сведя задачу к случаю, где монет номиналом 5 не больше одной. Рассмотрим два случая:

Случай 1: монет номиналом 5 нет.

Тогда либо сумма денег в монетах номиналом 10 составляет не менее 5000 Эйлеровых Центов, в этом случае можно выделить 5000 Эйлеровых Центов в виде монет номиналом 10 и оставить оставшиеся деньги в другой куче, либо сумма денег в монетах номиналом 25 составляет не менее 5000 Эйлеровых Центов, и тогда можно аналогично выделить 5000 Эйлеровых Центов в монетах номиналом 25.

Случай 2: ровно одна монета номиналом 5.

Рассмотрим сумму денег по модулю 25 Эйлеровых Центов. Оказывается, что в этом случае обязательно должны быть как минимум две монеты номиналом 10. Тогда можно сгруппировать монету номиналом 5 и две монеты номиналом 10 в одну монету номиналом 25, сведя задачу к уже разобранному случаю.

№4. $\{a_n\}$ последовательность, такая что $a_1 = 0$ и

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)$$

для всех натуральных $n \geq 2$. Найдите максимальный член данной последовательности.

(За $\lceil x \rceil$ обозначается наименьшее целое число, которое не меньше, чем x. Например $\lceil \pi \rceil = \lceil 4 \rceil = 4$.)

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Решение. Вычислим первые члены последовательности: $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{7}{12}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{101}{180}, a_6 = \frac{19}{36}, a_7 = \frac{181}{336}$ и так далее. Заметим, что среди вычисленных нами a_3 самый большой, тогда теперь докажем, что для $n > 3$ $a_n < \frac{7}{12}$ индукцией.

В качестве базы у нас есть случаи $n = 4, 5, 6, 7$, поэтому теперь сфокусируемся на $n \geq 8$, допустим нам удалось доказать желаемое до $n \leq \ell - 1$, теперь докажем это же утверждение для ℓ, поделя доказательство на 2 случая:

Случай 1: $\ell = 2k$

$$a_{2k} < \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{19 + 7(k-4)}{12}\right) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \cdot \frac{7k - 9}{12} = \frac{1}{2k} + \frac{7}{12} - \frac{9}{12k} < \frac{7}{12}$$

Случай 2: $\ell = 2k + 1$

$$a_{2k+1} < \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{19 + 7(k+1-4)}{12}\right) = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{k+1} \cdot \frac{7(k+1) - 9}{12} =$$

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{7}{12} - \frac{9}{12(k+1)} < \frac{7}{12}$$

Таким образом, мы доказали индукцию и $a_3 = \frac{7}{12}$ действительно максимальный член данной последовательности.

№5. Дана клетчатая таблица 2×10. Каждую клетку можно покрасить либо в черный цвет, либо в белый. Черная клетка называется “застрявшей”, если выполняются оба условия:

1) Слева от нее в той же строке есть хотя бы одна белая клетка

2) Над ней в том же столбце есть хотя бы одна белая клетка

Сколько способов покрасить таблицу, чтобы не было ни одной застрявшей клетки?

Ответ: $3^{11} - 2^{11} - 3^{10}$.

Решение. Пусть первые k клеток 2-ой строки таблицы черные, где $k \leq 10$. Тогда, заметим, что клетки над ними могут быть как черными, так и белыми. Также, $k+1$-ая клетка 2-ой строки должна быть белой, а клетка над ней может быть как белой так и черной. Заметим, для каждой из оставшихся $n-k-1$ клеток 2-ой строки выполняется следующее: если она черная, клетка над ней тоже должна быть черной, а если клетка эта белая, то клетка над ней может быть как черной, так и белой.

Тогда, количество вариантов для данного k:

$$S_i = 2^{k+1} \cdot 3^{n-k-1}$$

Пробегая по всем k и учитывая случай когда все клетки второго ряда черные:

$$S = \sum_{i=1}^{10} a_i S_i + 2^{10}$$

Наконец, по ФСУ:

$$S = 3^{11} - 2^{11} - 3^{10}$$

№6. $a, b > 0$ и удовлетворяют условию $b^2 + ab + a \leq 3$. Докажите, что

$$a^2b^2 + \frac{4a}{a+b} \leq 4.$$

Решение. Заметим, что:

$$a^2b^2 + \frac{4a}{a+b} \leq 4 \iff a^2b^2 \leq 4 - \frac{4a}{a+b} = \frac{4b}{a+b} \iff a^2b(a+b) \leq 4.$$

По AM-GM имеем:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b(a+b)} \leq \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b(a+b)}{3} \leq 1.$$

ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения четвертого тура AMB, Junior

Капитанский бой. Найдите наибольший простой делитель числа $3^8 - 1$.

Ответ: 41.

№1. Дана клетчатая доска 2025×2025, и некоторые клетки доски раскрашены в красный цвет. Доска называется *крутой* если ни одна строка и ни один столбец не закрашены полностью в красный цвет.

Какое наибольшее количество закрашенных клеток в *крутой* доске?

Ответ: $2024 \cdot 2025$.

Решение. Заметим, что если окрашенных досок не менее $2024 \cdot 2025 + 1$ то, так как строк всего 2025, найдётся строка с как минимум $2024{+}1$ окрашенными клетками. Следовательно, доска не является *крутой*. Отсюда получаем $k \geq 2024 \cdot 2025$.

В качестве примера подойдет раскраска всех клеток, кроме клеток одной и з главных диагоналей.

№2. Докажите что существует бесконечно много четверок натуральных чисел (a, b, c, d), таких, что $ab + 1$, $bc + 16$, $cd + 4$, $ad + 9$ – полные квадраты.

Решение. Возьмем (a, b, c, d) как $(k+10, k+8, k, k+4)$. Легко убедиться что они подходят.

№3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На DC и AB соответственно выбрали точки R и S, такие, что $AD = RC$ и $BC = SA$. Точки P, Q и M – середины отрезков RD, BS и CA соответственно. Если $\angle MPC + \angle MQA = 90°$, докажите что $ABCD$ вписанный.

Решение. Возьмем X и Y как середины отрезков DC и AB получаем что $PX = \frac{AD}{2} = XM$ и аналогично $QY = YM$.

Теперь из $MX \parallel AD$, $MY \parallel BC$ легко получить:

$$\angle ADC + \angle CBA = \angle MXC + \angle MYA = 2 \cdot MPC + 2 \cdot \angle MQA = 2 \cdot 90° = 180°.$$

№4. Для каждого набора из пяти целых чисел $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, пусть P_S будет произведением всех разностей между двумя элементами.

Определите наибольшее целое число n, такое что для любого набора S из пяти целых чисел число n делит P_S.

Ответ: 288.

Решение. Сначала докажем, что $288 \mid P_S$ для всех S.

Если четыре элемента множества S имеют одинаковый остаток по $\pmod 2$, то очевидно, что $32 \mid P_S$.

Предположим, что $a_2 \equiv a_2 \equiv a_3 \not\equiv a_4 \equiv a_5 \pmod 2$

Тогда $2 \mid a_4 - a_5$, а также $16 \mid (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$ следовательно, $32 \mid P_S$

Аналогично, если три элемента множества S имеют одинаковый остаток по $(\mathrm{mod}\ 3)$, то очевидно, что $9 \mid P_S$.

Если такого набора нет, то остатки по модулю 3 распределены как 2/2/1 (в любом порядке), что также даёт $9 \mid P_S$

Чтобы показать, что 288 – максимальное возможное значение, достаточно взять $S = 1, 2, 3, 4, 5$, тогда $P_S = 288$

№5. Три различных ненулевых числа таковы, что при любой расстановке этих чисел на места коэффициентов квадратного трехчлена этот трехчлен будет иметь целый корень. Докажите, что у всех таких трехчленов есть корень 1.

Решение. Пусть, x_1,x_2 - корни многочлена ax^2+bx+c. Тогда числа $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ - корни $cx^2 + bx + a$. БОО, пусть $x_1 \in \mathbb{Z}$. Если $\frac{1}{x_1}$ целое, то x_1 равно 1 или -1.

Рассмотрим случай когда $x_1 = -1$. Тогда, $b = (1 - x_2)a$ и $c = -x_2a$. Тогда дискриминанты у $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ это $D_1 = c^2 - 4ab = a^2(x_2^2 + 4x_2 - 4)$ и $D_2 = a^2 - 4bc = a^2(-4x_2^2 + 4x_2 + 1)$ соотв. D_1 неотрицательный если $x_2 \le -2 - 2\sqrt{2}$ или $x_2 \ge -2 + 2\sqrt{2}$, а D_2 неотрицательно если $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le x_2 \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Тогда, чтобы у этих многочленов были корни должно выполнятся неравенство $2(\sqrt{2}-1) \le x_2 \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Корни у многочлена ax^2+cx+b это $\frac{x_2 \pm \sqrt{x_2^2+4x_2-4}}{2}$. Поскольку у этого многочлена есть целый корень n, $x_2^2+4x_2-4 = (2n-x_2)^2$, откуда $x_2 = n-1+\frac{2}{n+1}$.

Если $n \le -2$, то x_2 отрицательное, что противоречит неравенству для него. Если $n \ge 2$, то $x_2 \ge \frac{5}{3}$ и тоже противоречит неравенство. Значит n равно 0 или 1, откуда $x_2 = 1$, т.е. $f(1) = 0$.

Иначе, $x_1 \ne \pm 1$. Тогда $\frac{1}{x_2}$ - целое, значит корни $ax^2 + bx + c$ имеют вид n,$\frac{1}{m}$ для целых m,$n \ne \pm 1$. Отсюда $-\frac{b}{a} = n + \frac{1}{m}$.

Аналогично для других перестановок, мы получаем $-\frac{c}{b} = p + \frac{1}{q}$ и $-\frac{a}{c} = r + \frac{1}{s}$, где p,q,r,s - целые, отличные от ± 1. Если они все по модулю ≥ 2, то $|\frac{b}{a}|$,$|\frac{c}{b}|$,$|\frac{a}{c}| > 1$. Перемножив, получаем $1 > 1$ - противоречие. Тогда, одно из чисел m,n,p,q,r,s должно быть ± 1, что приводит нас к уже разобраному случаю.

№6. A и B по очереди играют с кучами монет на столе (куч с 0 монетами нет). На каждом ходу они могут выполнить одно из следующих действий:

1) Выбрать кучу с четным числом монет и разделить ее на две кучи с одинаковым числом монет.

2) Убрать со стола все кучи с нечетным числом монет. Для этого на столе должна быть хотя бы одна куча с нечетным количеством монет.

На каждом ходу, если один из этих двух ходов невозможен, игрок обязан выполнить другой. Первый, кто не сможет сделать допустимый ход, проигрывает.

Если A ходит первым и изначально на столе только одна куча с 2^{2025} монетами, кто имеет выигрышную стратегию?

Ответ: A.

Решение. Покажем что у A есть выигрышная стратегия. Пусть, T - количество куч, в которых число монет делится на 4. Если мы разделим кучу, в которой число монет делится на 8, T увеличится на 1. Если мы разделим кучу с 4 монетами, T уменьшится на 1. Поэтому если мы не убираем кучи со стола и не разделяем кучу из 2 монет, четность T меняется.

A будет играть чтобы после его хода T было четным и не было куч с нечетным числом монет. Если B меняет четность T, то до хода A оно нечетное, поэтому A может опять поменять четность. Если B разделяет кучу с 2 монетами, то A уберет нечетные кучи. Таким образом, A всегда может сделать ход, значит побеждает A.

ALMATY MATH BATTLES 2025

Решения пятого тура AMB, Junior

Капитанский бой. Посчитайте $\sqrt{1234321}$.

Ответ: 1111.

№1. Из набора чисел $1, 2, \ldots, 1000$ вычеркнуты все четные числа, а также все такие числа x, что $1000 - x$ делится на 7. Сколько чисел осталось?

Ответ: 429.

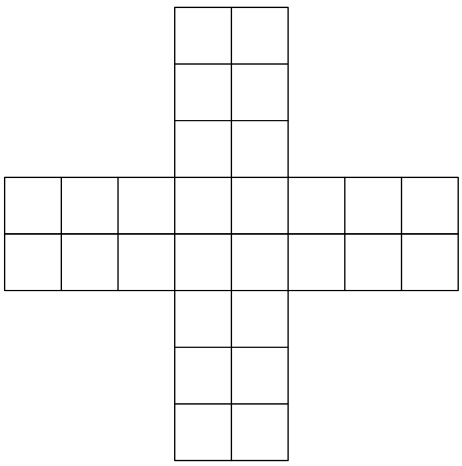
Решение. Всего вычеркнуто 500 четных чисел. Чисел удовлетворяющих условию $1000 - x$ делится на 7 всего 142. Из них уже 71 зачеркнуто, поэтому от 500 отнимаем 71 и получаем 429.

№2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC обозначим за B_1 и C_1 – середины сторон AC и AB соответственно. Точка D лежит на продолжении BC за точку C. Точка F такова, что $\angle AFC = 90^\circ$ и $\angle DCF = \angle FCA$. А точка G такова, что $\angle AGB = 90^\circ$ и $\angle CBG = \angle GBA$. Докажите, что точки B_1, C_1, F и G лежат на одной прямой.

Решение. Отметим за G' точке пересечения прямой AG с прямой BC. Тогда нетрудно заметить, что $\triangle ABG = \triangle G'BG$. Значит, что $AG = GG'$, откуда следует, что G лежит на средней линии треугольника ABC. Аналогично точка F тоже лежит на средней линии. Значит все эти точки лежат на средней линии.

№3.

Сколькими способами эту фигуру можно разрезать на прямоугольники 1×2 и 2×1?



Ответ: 450.

Решение. Рассмотрим несколько случаев. 1 случай, ни одна из этих доминошек не пересекает границы центрального квадратат 2×2. Тогда останется 4 прямоугольника 2×3, а способов разрезать 2×3 на доминошки – 3. Значит общее количество – $2 \cdot 3^4 = 162$.

2 случай, границы центрального квадрата пересекают только 2 доминошки. Тогда останется 1 квадрат 2×2 и 3 прямоугольника 2×3. Значит общее количество способов – $4\cdot2\cdot3^3=216$.

3 случай, границы центрального квадрата пересекают 4 доминошки. Тогда останется 2 квадрата 2×2 и 2 прямоугольника 2×3. Значит общее количество способов – $2\cdot2^2\cdot3^2=72$.

Общее количество – $162+216+72=450$.

№4. Найдите наименьшее нечетное число, которое невозможно представить в виде

$$\frac{2^m-1}{2^n+1}$$

где m и n – натуральные числа.

Ответ: 9.

Решение. Заметим, что

$$1=\frac{2^2-1}{2^1+1},\ 3=\frac{2^4-1}{2^2+1},\ 5=\frac{2^4-1}{2^1+1},\ 7=\frac{2^6-1}{2^3+1}.$$

Теперь рассмторим уравнение

$$9=\frac{2^m-1}{2^n+1}$$

Это сводится к решению уравнения

$$2^{m-1}-9\cdot2^{n-1}=5.$$

Если $m,n\geq2$, то левая часть четная – противоречие. Значит, что либо $n=1$, либо $m=1$. Оба варианта приводят к противоречию.

№5. Дан равносторонний треугольник ABC. Пусть точка O – центр его описанной окружности. Точка D выбрана на меньшей дуге BC описанной окружности ABC так, что $DB>DC$. Серединный перпендикуляр OD пересекает описанную окружность ABC в точках E и F (точка E тежит на меньшей дуге BC). Прямые BE и CF пересекаются в точке P. Докажите, что $PD\perp BC$.

Решение. Треугольники ODE и ODF равносторонние, и счетом углов можно понять, что $BD\perp CP$ и $CD\perp BP$, поэтому D – это ортоцентр $\triangle BCP$, откуда $PD\perp BC$.

№6. Жиенкожа выбрал натуральное число $n\leq100$, и Тимур пытается угадать это число. Чтобы сделать это Тимур может выбрать 2 натуральных числа $x,y<100$ и узнать НОД$(n+x,y)$. Докажите, что Тимур может угадать число Жиенкожи задав не более 7 вопросов (числа x и y можно менять каждый ход).

Ответ: Да.

Решение. Зададим следующие вопросы

$$a_1 = \gcd(x+64, 64) = \gcd(x, 64)$$

$$a_2 = \gcd(x + a_1, 64)$$

$$a_3 = \gcd(x + a_1 + a_2, 64)$$

$$a_4 = \gcd(x + a_1 + a_2 + a_3, 64)$$

$$\ldots$$

Они однозначно определяют X, поскольку постепенно строят его двоичную репрезентацию.

Ремарка. Существуют решения через Китайскую теорму об остатках по $\pmod 3$, $\pmod 5$, $\pmod 7 \implies \pmod{105}$.

№7. Найдите все положительные действительные числа A, что для последовательности ненулевых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots$ (x_1 – любое ненулевое действительное число) удовлетворяющее

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n}$$

для всех $n \geq 1$, имеет лишь конечное число отрицательных чисел.

Ответ: $A \geq 2$

Решение. Докажем, что $A < 2$ не удовлетворяет условию

Обратим внимание, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$,

$$A = x_{n+1} + \frac{1}{x_n} \geq 2\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}$$

по AM-GM и, следовательно, если мы положим $tA^2 = 4$ для некоторого $t > 1$, то

$$x_n > t x_{n+1}$$

и, следовательно, если мы положим $tA^2 = 4$ для некоторого $t > 1$, то

$$x_n > t x_{n+1}$$

у нас есть

$$\frac{x_n}{t^k} > x_{n+k}$$

что означает, что x_{n+k} достигнет сколь угодно малых положительных значений, однако

$$x_n > \frac{1}{A}$$

для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, что является противоречием.

Докажем, что $A \geq 2$ удовлетворяет условию

Предположим, что у нас есть хотя бы один отрицательный член в последовательности, поскольку в противном случае явно есть только положительные члены, тогда обратите внимание, что в следующем члене $x_n > A$.

Теперь возьмем некоторый $t \in \mathbb{R}^+$ такой, что $A = t + \frac{1}{t}$, который, очевидно, существует как $A \geq 2$.

Заметим, что если $x_n > A > t$, то

$$x_{n+1} = A - \frac{1}{x_n} > t$$

и, следовательно, $x_{m+i} > 0$ для всех $i \geq 0$.

№8. Докажите, что если нам даны 50 отрезков на прямой, то среди них есть либо 8 попарно пересекающихся отрезков, либо 8 попарно непересекающихся отрезков.

Решение. Индукцией по n мы показываем, что если нам дано $7n+1$ интервалов на прямой, то из них $n+1$ попарно не пересекаются или 8 имеют общую точку.

Если $n = 0$, то результат очевиден (поскольку существует только один, он попарно не пересекается).

Предположим, что результат верен для $n - 1$.

Пусть I_0 - интервал, крайняя левая точка которого – P_0, находится дальше всего вправо. Любой интервал, пересекающий I_0, содержит P_0.

Если пересекаются хотя бы 7 интервалов, то эти 7 интервалов и I_0 имеют общую точку.

Если нет, то по крайней мере $7(n-1)+1$ интервалов не пересекают I_0. Если их 8 из них, которые имеют общую точку, мы закончили. Если нет, то, согласно гипотезе индукции, существует по крайней мере n из них, которые попарно не пересекаются. Добавив к ним I_0, мы закончили.